TD9 6, 7, 8. $\rightsquigarrow$ Jordan-Hölder.

Soit G un groupe.

Un ss-groupe distingué maximal de G est un sous groupe distingué strict $H \triangleleft G$ (donc : $H \neq G$) qui est maximal en tant que tel.

Càd : $\forall K$, si $H \leq K \trianglelefteq G$: ou bien $K = H$ ou bien $K = G$

On veut montrer : Si G est un groupe fini, alors $\exists\, r \geq 0$ entier et $\exists$ suite $G_0 = G \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_r = 1$ $(1 = \{e\})$

tq. $\forall\, 0 \leq i < r$: G_{i+1} est un ss-groupe distingué maximal de G_i.

$(r = 0 \iff G = 1)$

avant : Mq $\forall\, G \neq 1$ fini admet un ss-grp dist. maximal

En effet : G admet au moins un ss-groupe distingué strict : $1 \triangleleft G$.

Puisque G est fini : on peut choisir $H \triangleleft G$ de cardinal maximal (parmi tous les ssgrps distingués stricts de G) :

Si $H \leq K \trianglelefteq G$: ou bien $K = H$

ou bien $|K| > |H| \Rightarrow K$ n'est pas un ss grp dist strict

$\Rightarrow K = G$.

H est bien un ss-grp dist. maximal

Maintenant : par réc sur $|G|$.

Si $G = 1$: $r=0$, $G_0 = G = 1$ ✓.

Sinon : $|G| > 1$, $\exists\, H \triangleleft G$ maximal.

$\Rightarrow |H| < |G|$, et l'hyp. de réc s'applique à H :

$\exists\, r \geq 1$ et une suite

$H = H_0 \triangleright \dots \triangleright H_r = 1$ avec $H_{i+1} \triangleleft H_i$ maximal. $\forall\, 0 \leq i < r$

Posons : $s = r+1$

$$G_0 = G \rhd \underbrace{H = H_0}_{= G_1} \rhd \underbrace{H_1}_{= G_2} \rhd \dots \rhd \underbrace{H_r}_{= G_{r+1} = G_s} = 1.$$

ss grp dist max : par choix de H

ss-grp dist max par choix de $H = H_0 \rhd H_1 \dots \rhd H_r = 1$.

$\therefore$ $G_0 = G \rhd G_1 \rhd \dots \rhd G_s = 1$

est comme souhaité. ∎

TD 9

6 1. Rappeler : Soit $H \trianglelefteq G$.

alors H est un ss-groupe distingué maximal de G

càd : $H \trianglelefteq G$ et si $H \leq K \trianglelefteq G$ alors $K = G$ ou $K = H$

autrement dit : G admet exactement deux ss-grp distingués qui contiennent H : H et G

$\Leftarrow)$

G/H est simple.

càd : G/H admet exactement deux ss-groupes distingués : G/H et 1 $(=\{e\})$

en particulier $G/H \neq 1$.

Considérons : Soit $G \trianglerighteq H$ et étudions / comparons :

$\{K : H \leq K \leq G\}$ et $\{L : L \leq G/H\}$.

Si $H \leq K \leq G$: $\forall x \in K$: $xHx^{-1} = H \Rightarrow H \trianglelefteq K$.

donc : K/H est un groupe $\subseteq G/H$

$= \{xH : x \in K\}$ $\qquad$ $\{xH,\ x \in G\}$

$xH \cdot yH = xyH$

$\Rightarrow$ $K/H \leq G/H$ est un ss-grp.

Considérons $\varphi : G \to G/H$ l'application quotient.

$x \mapsto xH$

alors Mq : pour tout $L \leq G/H$: $H \leq \varphi^{-1}(L) \leq G$

Si $x \in H$ alors $\varphi(x) = xH = H = e_{G/H} \in L$

$\Rightarrow x \in \varphi^{-1}(L)$.

$\therefore \varphi^{-1}(L) \supseteq H$.

En particulier : $\varphi^{-1}(L) \neq \emptyset$.

si $x, y \in \varphi^{-1}(L) \Rightarrow \varphi(x), \varphi(y) \in L$

$\varphi(x^{-1}y) = \varphi(x)^{-1}\varphi(y) \in L \Rightarrow x^{-1}y \in \varphi^{-1}(L)$

$\therefore H \le \varphi^{-1}(L) \le G$

$$\begin{tikzcd}
\{K : H \underset{\trianglelefteq}{\le} K \le G\} \arrow[rr, bend left, "K \mapsto K/H"] & & \{L : L \le G/H\} \arrow[ll, bend left, "\varphi^{-1}(L) \mapsfrom L"]
\end{tikzcd}$$

pour $\overset{\cup}{K}$: $\varphi^{-1}(K/H) = ?$

$x \in$ ↗ $\iff \underset{xH}{\varphi(x)} \in K/H$

$\iff \exists y \in K$ tq $\underbrace{xH = yH}_{\iff y^{-1}x \in H}$

$\iff \exists y \in K$ tq $y^{-1}x \in H \iff x \in yH$

$\iff x \in \underbrace{K \cdot H}_{= K}$.

donc : $\varphi^{-1}(K/H) = K$.

soit : $L \le G/H$

$\{\underset{\varphi(x)}{xH} : x \in \varphi^{-1}(L)\} = \varphi^{-1}(L)/H = ?$

$\{\varphi(x) : x \in G$ tq $\varphi(x) \in L\} = L$.

$\{xH : x \in G$ tq $xH \in L\}$

On continue : soit $H \leq K \leq G$

et $L = K/H \leq G/H$

Soit $x \in G$. $y = xH \in G/H$

$$xKx^{-1} \supseteq xHx^{-1} = H \implies xKx^{-1}/H \leq G/H.$$

$$yLy^{-1} = (xH) \cdot (K/H)(xH)^{-1}$$
$$= \{(xH)(zH)(xH)^{-1} : z \in K\}$$
$$= \{xzx^{-1}H : z \in K\} = xKx^{-1}/H.$$

En particulier: $K \trianglelefteq G \iff \forall x \in G \ \underbrace{xKx^{-1} = K}$ $\iff \underbrace{xKx^{-1}/H}_{= (xH)(K/H)(xH)^{-1}} = K/H$

$\iff \forall xH \in G/H :$

$K/H = (xH)(K/H)(xH)^{-1}$

$\iff K/H \trianglelefteq G/H.$

Donc: On a une bij :

$$\text{Ⓐ} = \{H \leq K \trianglelefteq G\} \longleftrightarrow \{L \trianglelefteq G/H\} = \text{Ⓑ}$$

$$K \longmapsto K/H.$$

Or: $H \trianglelefteq G$ est un ss grp dist. max ssi $|\text{Ⓐ}| = 2$

G/H est simple $|\text{Ⓑ}| = 2$

$\Leftrightarrow$

2. On suppose que H, K sont deux ss grps dist. maximaux distincts de G.

$L = H \cap K$.

Mq - $HK = G$

- L est un ss grp distingué maximal de H et de K.

- $G/H \simeq K/L$

- $G/K \simeq H/L$

Rappel : 2e théorème d'isomorphie.

Soit G - groupe, $H, K \leq G$.

$H \leq N_G(K)$.

alors :
- $HK \leq G$.
- $K \trianglelefteq HK$
- $H \cap K \trianglelefteq H$
- $$\begin{array}{ccc} H/K\cap H & \simeq & HK/K \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x(K\cap H) & \longmapsto & xK \end{array}$$ est un isomorphisme.

Dans notre cas : $H, K \trianglelefteq G \Rightarrow N_G(K) = G \geq H$.

$\Rightarrow HK \leq G$.

Soit $x \in G$: $x\underset{\substack{\uparrow\\ c_x}}{H}K x^{-1} = \underbrace{xHx^{-1}}_{H}\underbrace{xKx^{-1}}_{K} = HK$.

$\Rightarrow HK \trianglelefteq G$.

$HK \geq H$ or H est un ss-grp dist. maximal
$\Rightarrow HK = H$ ou $HK = G$.

$HK \geq K$ $\Rightarrow HK = K$ ou $HK = G$

$\Rightarrow \quad \underline{HK = G}.$

2^e thm nous dit aussi que

$$H/L = H/H\cap K \simeq HK/K = G/K.$$

or : K est un ss-grp dist. max. de G

$\Downarrow$

G/K est simple

$\Downarrow$

H/L est simple

$\Downarrow$

L est un ss-grp dist. max. de H.

Les rôles de H et de K sont symétriques donc par le même argument :

$K/L \simeq G/H$ et L est un ss-grp max de K

cqfd

TD 9 -

8. Démontrer le thm de Jordan - Hölder :

Soit G un groupe fini, et soit

$$H_0 = G \rhd H_1 \rhd H_2 \rhd \cdots \rhd H_r = 1.$$

$$K_0 = G \rhd K_1 \rhd \cdots \rhd K_t = 1$$

deux suites de Jordan Hölder de G :

$\forall\, 0 \leq i < r$ H_{i+1} est un ss-groupe dist. maximal de H_i

$\forall\, 0 \leq i < t$ K_{i+1} —— K_i

alors : $r = t$ et les deux listes de quotients

$$(H_i / H_{i+1} \ . \ 0 \leq i < r)$$

et

$$(K_i / K_{i+1} \ . \ 0 \leq i < \overline{r})$$

se déduisent l'une de l'autre par une permutation.

Indication : par réc. sur $\min(r, t)$.

Preuve : Étape n de la réc :
On suppose que c'est vrai dès que $\min(r,t) < n$
et on démontre pour $\min(r,t) = n$.

$n = 0$: On suppose que $\min(r,t) = 0$: $r = 0$ ou $t = 0$.

Si $r = 0$: $G = H_0 = 1$

$\Rightarrow t = 0.$

pareil : $t = 0 \Rightarrow G = 1 \Rightarrow r = 0.$

et les deux listes sont vides. ✓

$n > 0$: On suppose que $\min(r,t) = n \geq 1. \Rightarrow r \geq 1$ et $t \geq 1$

on a : $G = H_0 \rhd H_1 \rhd \cdots$

$G = K_0 \rhd K_1 \rhd \cdots$

posons $H = H_1$: H_1 est un ss-grp dist. max de H_0.

$$H \text{ ——————— } G$$

$K = K_1$

$$K \text{ ——————— } G.$$

2 cas: I. $K = H$.

alors

$$\begin{array}{l} H'_0 \quad H'_1 \qquad\qquad H'_{r-1} = 1 \\ H = H_1 \rhd H_2 \quad \dots \quad H_r = 1 \\ \| \\ K = K_1 \rhd K_2 \quad \dots \quad K_t = 1 \\ K'_0 \quad K'_1 \qquad\qquad K'_{t-1} = 1 \end{array}$$

sont deux suites de J-H pour $H = K$.

On a $\min(r-1, t-1) = \min(r,t) - 1 = n-1 < n$.

par hyp de réc : $r - 1 = t - 1$ ($\Leftrightarrow r = t$).

et $(H'_i / H'_{i+1} : 0 \leq i < r-1)$ est une permutation de $(K'_i / K'_{i+1} : 0 \leq i < t-1)$

$= (H_i / H_{i+1} : 1 \leq i < r)$ $\qquad$ $= (K_i / K_{i+1} : 1 \leq i < t)$

$\Rightarrow$ $(\underset{\displaystyle \overset{\|}{H_0/H_1}}{G/H}, H_1/H_2, \dots H_{r-1}/H_r)$ est une permutation de $(\underset{\displaystyle \overset{\|}{K_0/K_1}}{G/H}, K_1/K_2, \dots, K_{r-1}/K_r)$

$= (H_i / H_{i+1} : 0 \leq i < r)$ $\qquad$ $= (K_i / K_{i+1} : 0 \leq i < r)$.

II cas difficile : $H \neq K$.

D'après l'exo 6 : Soit $L = H \cap K$.

alors – L est un ss grp dist. max de H et de K.

– $G/H \simeq K/L$, $G/K \simeq H/L$.

D'après 7 : L admet une suite de J-H :

$L : L_0 \triangleright L_1 \ldots \triangleright L_s = 1$.

Donc :

$H \triangleright \overset{L}{\overset{\shortparallel}{L_0}} \triangleright L_1 \ldots \triangleright L_s = 1$ est une suite de J-H pour H.

Or : $H = H_1 \triangleright H_2 \triangleright \ldots \triangleright H_r = 1$ l'est aussi.

et : $\min(r-1, s+1) \ldots$?

OPS que $r \leq t$ (sinon on échange les H_i avec les K_i)

$\Rightarrow n = r$, $\min(r-1, s+1) \leq r-1 < r = n$.

L'hyp de réc s'applique : $r-1 = s+1$

et $(H_i/H_{i+1} ; 1 \leq i < r)$ se déduit par permutation de $(H/L, (L_i/L_{i+1} : 0 \leq i < s))$.

Or L est aussi un ss grp dist max de K

$\Leftarrow$ $K \triangleright L = L_0 \triangleright L_1 \ldots L_s = 1$ est une suite de J-H pour K. On a une autre telle suite :

$$K = K_1 \triangleright K_2 \triangleright \cdots \triangleright K_t = 1.$$

Or : $s+1 = r-1 = n-1 \Rightarrow \min(s+1, t-1) < n$

L'hyp de réc s'applique : $r-1 = s+1 = t-1 \Rightarrow r = t$.
$s = r-2$.

et : $(K_i/K_{i+1} : 1 \leq i < r)$ est une perm. de

$$\left(K/L, \left(L_i/L_{i+1} : 0 \leq i < s\right)\right)$$

Donc :
Les listes suivantes se déduisent l'une de l'autre par permutation :

- $(H_i/H_{i+1} : 0 \leq i < r) = \left(\underset{\underset{\underset{K/L}{\wr}}{\underset{G/H}{\shortparallel}}}{H_0/H_1}, (H_i/H_{i+1} : 0 \leq i < r)\right)$

- $\left(K/L, H/L, (L_i/L_{i+1} : 0 \leq i < s = r-2)\right)$

- $\left(H/L, K/L, (L_i/L_{i+1} : 0 \leq i < r-2)\right)$

- $\left(\underset{\underset{\underset{K_0/K_1}{\shortparallel}}{\underset{G/K}{\wr}}}{H/L}, (K_i/K_{i+1} : 1 \leq i < r)\right) = (K_i/K_{i+1} : 0 \leq i < r).$

cqfd.